Thầy LÊ ANH TUẤN(Thầy Tuấn hocmai): 0915412183
Cộng tác viên: CV HÀ

TUYỂN CHỌN BÀI TOÁN OXY BÁM SÁT KÌ THI THPT QG 2016 - TOANMATH.COM

A. Phương pháp chung để giải quyết bài toán hình học giải tích phẳng gồm các bước sau:

- Vẽ hình, xác định các yếu tố đã biết lên hình
- Khám phá các tính chất khác của hình (nếu cần). Chú ý tìm các đường vuông góc, song song, đồng quy; các đoạn bằng nhau, góc bằng nhau; các góc đặc biệt; quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng, đường tròn,...
- Xác định các điểm, đường thẳng (theo các kĩ thuật đã học) để thực hiện yêu cầu bài toán.

B. Một số hướng khai thác giả thiết

Dưới đây là một số hướng khai thác các giả thiết của đề bài. Dĩ nhiên, tùy vào từng bài cụ thể, ta còn có những hướng sử dụng khác.

1. Phương trình đường thẳng d :

- Tham số hóa tọa độ của các điểm thuộc d
- Xét được vị trí tương đối, tìm được giao điểm của d và đường tròn hoặc đường thẳng khác.
- Viết được phương trình đường thẳng:
  - Song song hoặc vuông góc với d .
  - Cách d một khoảng cho trước.
  - Tạo với d một góc cho trước.
- Lấy đối xứng được qua d . Tìm được hình chiếu của 1 điểm lên d.
- Xét được vị trí tương đối của hai điểm A, B so với d .

2. Phương trình đường tròn (C)

- Tìm được tâm và bán kính
- Xét được vị trí tương đối, tìm giao điểm của (C) và đường thẳng hoặc đường tròn khác.

3. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC .

- Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$
- G cùng với trực tâm H, tâm ngoại tiếp I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$

4. Điểm H là trực tâm của tam giác ABC

- $AH \perp BC$.
- $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$, với I là tâm đường tròn ngoại tiếp còn M là trung điểm BC.
- Điểm đối xứng của H qua AB, AC, BC thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- Tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, với A' là đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp.
- H cùng với trọng tâm G , tâm ngoại tiếp I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

5. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

- $IA=IB=IC=R$
- I nằm trên đường trung trưch các cạnh.
- I cùng với trọng tâm G , trực tâm H thẳng hàng và $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

Thầy LÊ ANH TUẤN(Thầy Tuấn hocmai): 0915412183
Cộng tác viên: CV HÀ

6. J ***là tâm đường tròn nội tiếp tam giác*** ABC

- J cách đều các cạnh của tam giác.
- Tìm được bán kính nội tiếp tam giác: $r = d_{(J,AB)}$
- AJ, BJ, CJ là các đường phân giác trong của các góc trong tam giác.

7. d ***là đường phân giác trong góc*** BAC ***.***

- $A, J, K \in d$. Trong đó J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và bang tiếp cạnh BC.
- Lấy đối xứng điểm $M \in AB$ qua d ta được $M' \in AC$.
- $d_{(M,AB)} = d_{(M,AC)}, \forall M \in d$
- d cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm chính giữa cung BC

8. Tứ giác nội tiếp.

- Viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp.
- Sử dụng được tính chất: các góc nội tiếp chắn cùng 1 cung thì bằng nhau.
- Chứng minh được 1 điểm cách đều các điểm khác.

Các cách chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp:

(a) Bốn đỉnh cùng cách đều 1 điểm.
(b) Có hai góc đối diện bù nhau (tổng 2 góc đối = 180^0)
(c) Hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng (tạo bởi hai đỉnh còn lại) hai góc bằng nhau.
(d) $MA.MB = MC.MD$, trong đó: $M = AB \cap CD$; $NA.ND = NC.NB$, với $N = AD \cap BC$.
(e) $IA.IC = ID.IB$ với I là giao điểm hai đường chéo.
(f) Tứ giác đó là hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông,..

C. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (THPT-2015). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường AD. Giả sử $H(-5;-5)$, $K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Hướng dẫn

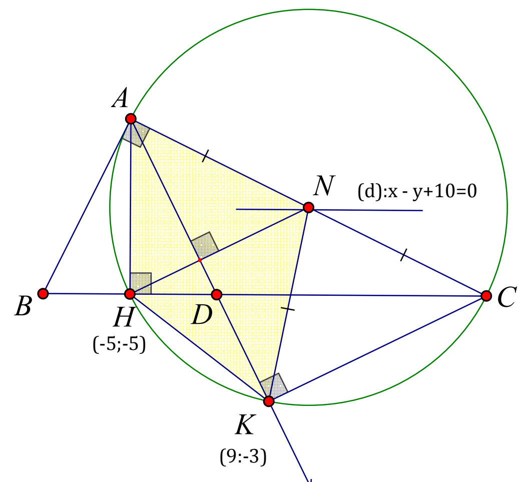
Gọi N là trung điểm AC

Ta có điểm $N \in (d): x - y + 10 = 0 \Rightarrow N(n; n+10)$

Ta có điểm N theo 1 biến số, mà đề bài có cho 2 điểm $H(-5;-5)$, $K(9;-3)$ tường minh, vậy ta nghĩ đến liệu có mối liên hệ nào giữa 3 điểm N, H, K hay không?

Xét tam giác vuông AHC vuông tại H và N là trung điểm AC nên $\Rightarrow HN = \frac{1}{2}AC$

Tương tự giác vuông AKC vuông tại K và N là trung điểm AC nên $\Rightarrow KN = \frac{1}{2}AC$



Từ đó ta có $HN = KN$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(-5-n\right)^2+\left(n+10+5\right)^2} = \sqrt{\left(9-n\right)^2+\left(n+10+3\right)^2} \Leftrightarrow n=0 \Rightarrow N\left(0;10\right)$

Vậy mình đã tìm được điểm N, vậy câu hỏi tiếp theo là: "Mình đi tìm điểm nào tiếp theo ?"

Do mình có tọa độ các đỉnh N, H, K, nên mình dễ dàng viết được phương trình đường tròn (T) ngoại tiếp tứ giác AHKC (có tâm là N và bán hình là NK).

Tiếp tục theo dõi vào hình thì các điểm mình chưa biết là: A, B, C , D. Trong đó, B và D mình không có dữ kiện gì, còn A và C thì nằm trên đường tròn (T). Vậy ưu tiên đi tìm A hoặc C rồi.

Chọn **một trong hai** điểm A hoặc C để đi tìm.

Giả sử nếu các em chọn A.

Khi đó hãy cố gắng liên kết điểm A với các điểm đã biết (H, K , N).

Nối 4 đỉnh này lại vs nhau ta được 1 tứ giác, hãy xem tứ giác này có gì đặc biệt hay không ? hay có 1 mối liên hệ gì giữa 4 đỉnh này hày không?

Khi đó các em sẽ nhận ra rằng tứ giác này có 2 đường chéo vuông góc với nhau, $AK \perp HN$.

Nếu các em không thích chọn A, thì chọn C cũng được.

Tương tự, hãy xét tứ giác CNHK có gì đặc biệt hay không?

Khi đó em sẽ nhận ra được tứ giác này là hình thang có $HN \parallel CK$

Dù chọn tìm điểm A hay điểm C thì các em cũng cần phải **chứng minh tính chất**

- $AK \perp HN$ hoặc $HN \parallel CK$ (2 cái này là 1) để có thể làm tiếp được bài toán.

Chứng minh này có nhiều cách làm, các em có thể tham khảo cách chứng minh sau:

Xét ΔABD cân tại A có H là chân đường cao hạ từ đỉnh A, và B đối xứng với D qua H $\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A.

$\Rightarrow \widehat{HAK} = \widehat{BAH}$ (đường cao hạ từ đỉnh cân cũng là đường phân giác)

$\widehat{BAH} = \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{AH}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung = 1/2 số đo cung)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{AH} = \widehat{AKH} \Rightarrow \Delta AHK$ cân

$\Rightarrow$ H là điểm chính giữa của cung AK, $\Rightarrow HN \perp AK$

Vậy dựa vào ý nào ta cũng đi tìm được điểm A (theo $AK \perp HN$) hoặc điểm C (theo $HN \parallel CK$) của tam giác ABC.

Tiếp theo ta viết được phương trình AB do AB đi qua A và AB vuông góc với AC,

Tương tự viết được phương trình CH do biết tọa độ C và H hay chính là phương trình BC.

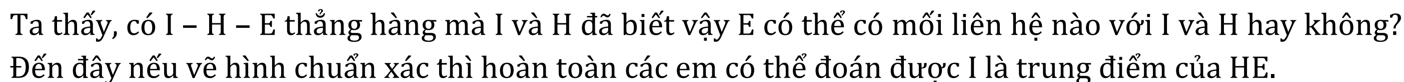
Từ đây, $B = AB \cap BC$ ta tìm được tọa độ điểm B.

Lời giải chi tiết các em tự làm nhé :)

Ví dụ 2(Sở GD&ĐT Hà Nội – 2016).Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $H(5;5)$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên cạnh BC, đường phân giác trong góc A của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $x-7y+20=0$. Đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC đi qua điểm $K(-10;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có tung độ dương.

Thầy LÊ ANH TUẤN(Thầy Tuấn hocmai): 0915412183
Cộng tác viên: CV HÀ

Cách tư suy khi làm bài

Với câu hỏi đặt ra như trên, chúng ta nên đi tìm điểm nào trước ? A? B? hay C?
Nhìn vào bài toán này ta thấy:
+) A thuộc 1 đường thẳng đã biết phương trình;
+) B có dữ kiện $y_B > 0$, nhưng dữ kiện này không tham gia vào quá trình tính toán, mà chỉ tham gia vào quá trình loại nghiệm mà thôi.
+) C hoàn toàn không biết gì.
Vậy chắc chắn 1 điều là ta nên đi tìm điểm A trước.
Vì điểm A thuộc phương trình AD: $x-7y+20=0$ (D là giao của phân giác trong của góc A với BC), nên ta chỉ cần đi tìm 1 phương trình liên quan đến điểm A nữa là được.
Vì điểm H và K đã có tọa độ rõ ràng, nên đi tìm điểm A ta sẽ thử kết hợp điểm A với 2 điểm H và K xem được không ? Biết đâu tạo ra 1 tam giác đều, cân, vuông,.. gì đó thì ra sẽ có thêm 1 phương trình liên quan đến A. Nhưng trong bài này tam giác AHK không có gì đặc biệt cả.
Bắt đầu bí rồi @@
Nhìn lại hình thêm chút nữa nhé.
Trong bài toán, cho điểm K là "bất kỳ" thuộc đường thẳng trung tuyến hạ từ A của ΔABC. Dữ kiện điểm K "bất kỳ" mà lại có tọa độ rõ ràng chính là 1 gợi ý cho chúng ta đi viết 1 phương trình đường thẳng nào đó chứa điểm K.
Mà chúng ta đang cần tìm 1 phương trình liên quan đến A, vậy chắc chúng ta phải đi viết phương trình AK hay AM rồi.
Vậy viết phương trình AK như thế nào?
Để viết phương trình đường thẳng AK ta cần biết 1 điểm đi qua (cái này đã có điểm K rồi) và 1 vector pháp tuyến hoặc 1 vector chỉ phương (cái này chưa biết) hoặc trường hợp đơn giản là chỉ cần biết 2 điểm đi qua.
Tiếp theo, nhìn vào dữ kiện đề bài cho, 1 phương trình đường thẳng (d) và 2 điểm H và K, ta nên thử kẻ các phương trình đường thẳng đi qua H, K $\perp$ hoặc song song với (d).
Thì ta thấy, chỉ có phương trình đường thẳng đi qua H và vuông góc với (d) là cắt AM và AD là I và E.
Điểm I hoàn toàn tìm được
Giờ ta chỉ cần tìm được E là xong rồi. Nhưng vấn đề là ta tìm E như thế nào ?
Ta thấy, có I – H – E thẳng hàng mà I và H đã biết vậy E có thể có mối liên hệ nào với I và H hay không?

Đến đây nếu vẽ hình chuẩn xác thì hoàn toàn các em có thể đoán được I là trung điểm của HE.

Thầy LÊ ANH TUẤN(Thầy Tuấn hocmai): 0915412183
Cộng tác viên: CV HÀ

Nếu I là trung điểm HE thì ΔAHE cân tại A rồi. Giờ chúng ta chỉ cần CM được điều này là bài toán được giải quyết.

Khi tìm được A rồi ta viết được phương trình BC do đi qua H và vuông góc với AH. Từ đó tìm được điểm M. Viết được phương trình đường trong tâm (M) bán kính MA cho giao với BC tìm được điểm B và C, chú ý điều kiện $y_B > 0$ để xác định B và C

Trên đây là 1 hướng suy nghĩ về các tư duy để làm bài toán. Tuy hơi dài dòng nhưng lời giải của bài toán này cực kỳ ngắn gọn như sau, các em tham khảo:

Lời giải chi tiết

AM là trung tuyến của tam giác ABC nên ta có: $MA = MB = MC$, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C}$.

Mặt khác: $\widehat{A_4} = \widehat{C}$ (cùng phụ với góc $\widehat{B}$).

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_4} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$ (do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$), khi đó AD là phân giác của góc $\widehat{HAM}$.

Gọi E đối xứng với H qua $AD \Rightarrow E \in AM$, khi đó $HE \perp AD$ nên phương trình $HE: 7x + y - 40 = 0$.

Suy ra tọa độ giao điểm I của AD và HE là: $\begin{cases} x - 7y + 20 = 0 \\ 7x + y - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26}{5} \\ y = \dfrac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{26}{5}; \dfrac{18}{5}\right)$.

Do I là trung điểm của HE, suy ra $E\left(\dfrac{27}{5}; \dfrac{11}{5}\right)$. AM đi qua $E\left(\dfrac{27}{5}; \dfrac{11}{5}\right)$ và $K(-10;5)$ nên có phương trình: $2x + 11y - 35 = 0$.

Vậy tọa độ điểm A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x + 11y - 35 = 0 \\ x - 7y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$. Khi đó BC đi qua $H(5;5)$ và vuông góc với AH $\left(\overrightarrow{AH} = (4;2) = 2(2;1)\right)$ nên có phương trình: $2x + y - 15 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 15 = 0 \\ 2x + 11y - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{13}{2}; 2\right)$.

Gọi $B(t; 15 - 2t) \in BC$, khi đó :

$$\mathrm{MB}^2 = \mathrm{MA}^2 \Leftrightarrow \left(t - \frac{13}{2}\right)^2 + (2t - 13)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 65t + 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(9;-3) \\ B(4;7) \end{array}\right. \xrightarrow{y_B > 0} B(4;7)$$

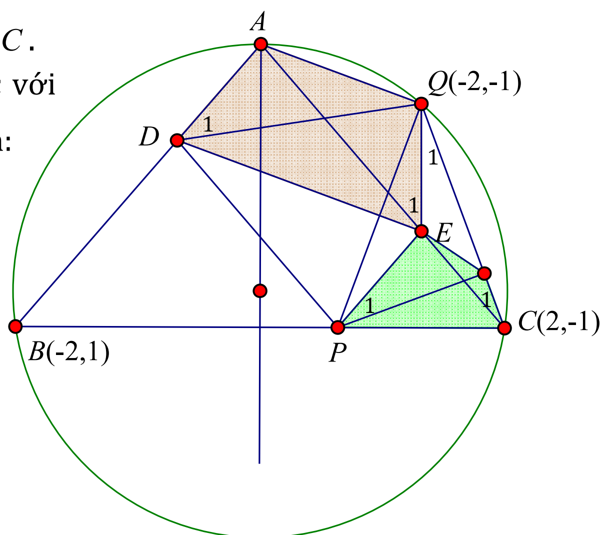
Do M là trung điểm của $BC \Rightarrow C(9;-3)$. Vậy $A(1;3), B(4;7), C(9;-3)$.

Bài tập luyện tập thêm

<u>Bài 1</u> <u>(*THPT Anh Sơn II Nghệ An*).</u> Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A với $B(-2;1), C(2;-1)$, gọi P là điểm trên cạnh BC. Đường thẳng qua P song song với AC cắt AB tại D,

đường thẳng qua P song song với AB cắt AC tại điểm E. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE. Tìm tọa độ điểm A biết $Q(-2;-1)$.

Hướng dẫn



Do ΔABC cân tại A nên A thuộc đường trung trực d của BC.

Khi đó d đi qua trung điểm $O(0;0)$ của BC và vuông góc với BC với $\overrightarrow{BC}=(4;-2)=2(2;-1)$ nên d có phương trình: $2x-y=0$.

Ta sẽ đi chứng minh A thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCQ hay chứng minh $\widehat{BAQ}+\widehat{BCQ}=180^0$.

Thật vậy:

Ta có $PEAD$ là hình bình hành, suy ra

$DP=AE$ và $EP=AD$ (1)

Do DE là trung trực của PQ,

suy ra $DP=DQ$ và $EP=EQ$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AE=DQ$

và $AD=EQ \Rightarrow \Delta ADQ=\Delta QEA$ (c – c – c)

$\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{E_1}$, suy ra $ADEQ$ nội tiếp đường tròn hay $\widehat{DAQ}=\widehat{QEH}$ (*) (vì cùng bù với $\widehat{DEQ}$).

Mặt khác, ta có: $\widehat{EPC}=\widehat{ECP}$ (cùng bằng góc $\widehat{B}$), suy ra $EP=EC\Rightarrow EQ=EC\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{Q_1}$

Lại có E,H thuộc trung trực của $BC\Rightarrow \widehat{P_1}=\widehat{Q_1}\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{P_1}$, suy ra $EHCP$ nội tiếp đường tròn

Khi đó $\widehat{HCP}=180^0-\widehat{HEP}=180^0-\widehat{HEP}=180^0-\widehat{QEH}=180^0-\widehat{DAQ}$ (theo (*)), suy ra $\widehat{HCP}+\widehat{DAQ}=180^0$ hay $\widehat{BAQ}+\widehat{BCQ}=180^0$.

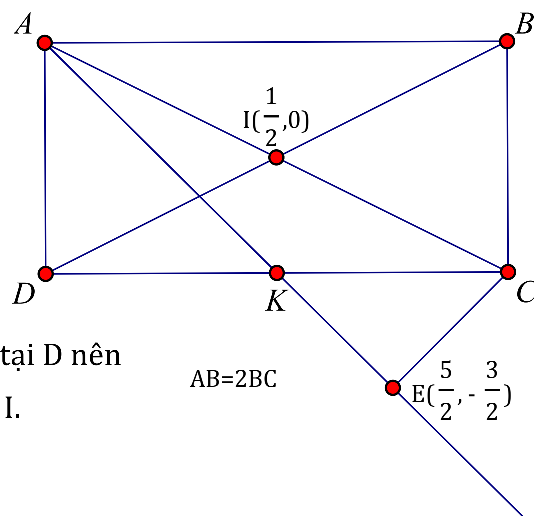
Vậy $ABCQ$ nội tiếp đường tròn có phương trình (phương trình đi qua 3 điểm B,C,Q) là: $x^2+y^2=5$ .Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x-y=0\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=-2\\ x=1;y=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(-1;-2)\\ A(1;2)\end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện A,Q nằm cùng phía với đường thẳng BC cho ta đáp số $\boxed{A(-1;-2)}$.

<u>Bài 2.</u>Cho hình chữ nhật ABCD tâm I. Gọi K là trung điểm của cạnh DC, E là hình chiếu của C trên AK. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết rằng $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, $E\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$, điểm B có hoành độ dương và AB = 2BC.

Hướng dẫn



Từ giả thiết ta có $IE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp ngũ giác ABCED.

Tam giác IBE cân tại I nên $\widehat{IEB}=\widehat{EBD}$; Tam giác ADK vuông cân tại D nên $\widehat{IEB}=\widehat{EBD}=\widehat{EAD}=45^0$. Từđó suy ra tam giác IBE vuông cân tại I.

BD đi qua điểm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ và có véc tơ pháp tuyến

$\overline{IE}=\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ hay $\vec{n}=(4;-3)$ nên BD có phương trình là :

$4\left(x-\frac{1}{2}\right)-3(y-0)=0$ hay $4x-3y-2=0$

BD đi qua điểm $K(-1;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\hat{u}=(3;4)$ nên có phương trình tham số là $BD:\begin{cases}x=-1+3t\\y=-2+4t\end{cases}$

Gọi $B(3t-1;4t-2)$ thuộc BD, điều kiện $t>\frac{1}{3}$ ta có

$IB=IE\Leftrightarrow\left(3t-\frac{3}{2}\right)^2+(4t-2)^2=2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\Leftrightarrow 25t^2-25t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=0 & (l)\\t=1 & (n)\end{array}\right.$

Từđó ta có $B(2;2)$. Vì I là trung điểm của BD nên $D(-1;-2)$

Ta có $BD=\sqrt{9+16}=5$, $AB^2+AD^2=BD^2=25\Rightarrow 5.AD^2=25\Rightarrow AD=\sqrt{5}, AB=2\sqrt{5}$

Gọi $A(x,y)$ ta có

$\begin{cases}AD=\sqrt{5}\\AB=2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2=5\\(x-2)^2+(y-2)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\y=-\frac{12}{5}\end{cases}\Rightarrow A_1(-2;0),A_2\left(\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)$

Kiểm tra A và E khác phía so với đường thẳng BD, ta có

$A_1(-2;0),E\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\left(4(-2)-3.0-2\right)\left(4.\frac{5}{2}-3.\left(-\frac{3}{2}\right)-2\right)<0$ nên $A_1;E$ khác phía so với đường thẳng BD.

$A_1(-2;0),A_2\left(\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)\Rightarrow\left(4\left(\frac{6}{5}\right)-3.\left(-\frac{12}{5}\right)-2\right)\left(4.\frac{5}{2}-3.\left(-\frac{3}{2}\right)-2\right)>0$ nên $A_2;E$ khác phía so với đường thẳng BD.

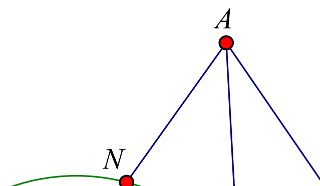
Vậy điểm A cần tìm là $A(-2;0)$. Vì I là trung điểm của AC nên $C(3;0)$.

Vậy $A(-2;0)$, $B(2;2)$, $D(-1;-2)$, $C(3;0)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d:x+2y-2=0$

Hướng dẫn

Ta thấy tứ giác $BMHN$ nội tiếp.



Suy ra I là trung điểm của BH; $B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

Suy ra: $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP}=(2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

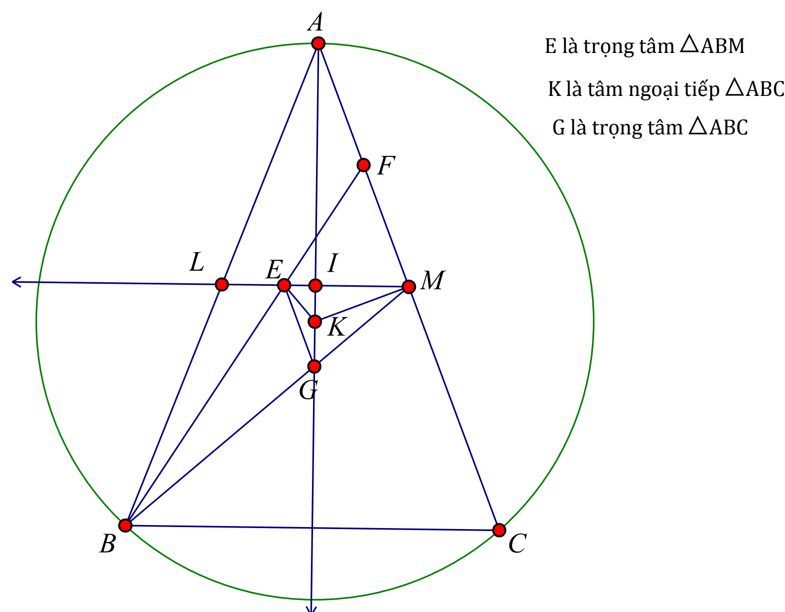
$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0$
$\Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2)=0$
$\Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH}=(1;-3)$, đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được tọa độ $C(-5;-4)$

Bài 4._(Chuyên Sư Phạm lần 2)._ Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (K). Gọi M là trung điểm của $AC; G, E$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABM. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $E\left(\frac{4}{3};11\right), G\left(2;\frac{23}{3}\right), K\left(2;\frac{53}{5}\right)$.

Hướng dẫn



Ta có tam giác ABC cân tại A, AG là trung tuyến hạ từ đỉnh A $AG \perp BC$. E là trọng tâm ΔABM nên $EM \parallel BC$ từ đây ta viết được phương trình EM

Đi qua E và nhận $\overrightarrow{GK}$ làm vector pháp tuyến.

Suy ra phương trình của $EM: y=11 \quad (1)$

Gọi I là giao điểm AG với ME khi đó I có tọa độ là $I(2,11)$

Gọi L là trung điểm AB. Xét ML có:

+) E là trọng tâm $\Delta ABM \Rightarrow ME=\frac{2}{3}ML$

+) I là trung điểm ML nên $MI=\frac{1}{2}ML$

Suy ra $ME=4IE$ (do I nằm giữa E và M). Hay $\overrightarrow{ME}=4\overrightarrow{IE} \Leftrightarrow M(4,11)$

Ví I là trung điểm ML nên $L(0,11)$

Mà G là trọng tâm trong ΔABC nên $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow B(-2;1)$.

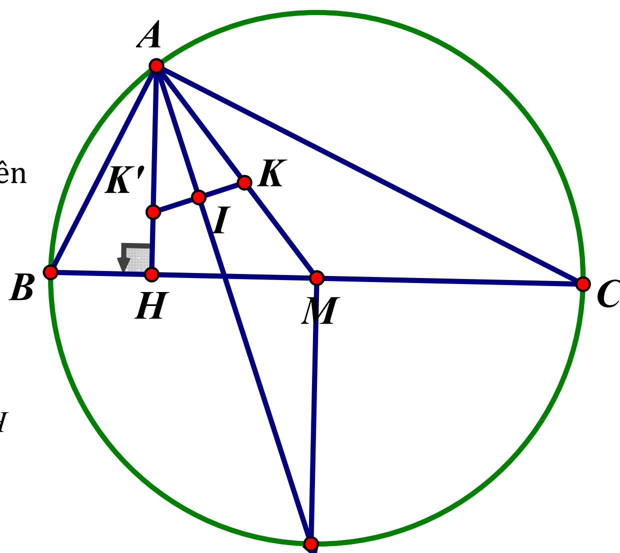
L là trung điểm AB nên $A(2;21)$.

M là trung điểm AC nên $C(6;1)$.

Thầy LÊ ANH TUẤN(Thầy Tuấn hocmai): 0915412183
Cộng tác viên: CV HÀ

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $H(5;5)$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên cạnh BC, đường phân giác trong góc A của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $x-7y+20=0$. Đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC đi qua điểm $K(-10;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm B có tung độ dương.

Hướng dẫn:



Ta có $\widehat{ACB}=\widehat{BAH}$ (do cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

Hơn nữa, $MA=MB=MC$ nên $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}$ nên $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$

Suy ra đường phân giác trong AD của góc A cũng là phân giác của góc $\widehat{HAM}$

Gọi K' là điểm đối xứng với K qua AD thì K' thuộc AH

Viết được phương trình $KK':7x+y+65=0$

$KK'\cap AD=I\Rightarrow I\left(-\frac{19}{2};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow K'(-9;-2)$

$AH:x-2y+5=0, AH\cap AD=A\Rightarrow A(1;3)\Rightarrow BC:2x+y-15=0$

Đường thẳng AM đi qua A và K nên $AM:2x+11y-35=0$. Vậy $M\left(\frac{13}{2};2\right)$

Vid B thuộc đường thẳng BC nên $B(b;15-2b)$

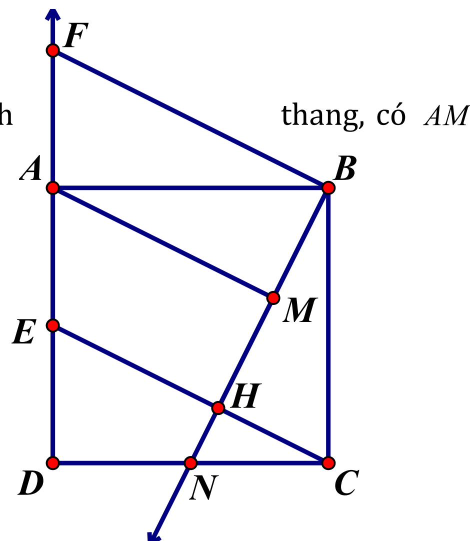
Do $MA=MB\Rightarrow 5b^2-65b+180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=9\\b=4\end{array}\right.$

Vậy $B(4;7),C(9;-3)$

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD và $H\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh CE; $M\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh BH. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A có hoành độ âm.

Hướng dẫn:

Vì M là trung điểm BH nên $M\left(-1;-2\right)$



Gọi F đối xứng với E qua A. Khi đó: $BF \parallel EC \Rightarrow BFEH$ là hình thang, có AM là đường trung bình nên $AM \perp BH$

Ta có: $BH: x-2y-3=0$

$CE: 2x+y-4=0, AM: 2x+y=0$

$\cos\widehat{BAM}=\cos\widehat{ECD}=\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Gọi $A\left(a;-2a\right), a<0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(a+1;-2a+2\right)$

Ta có $\cos\widehat{BAM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{AM}}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{u_{AM}}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 5a^2-6a-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{11}{5}(l)\end{array}\right. \Rightarrow A\left(-1;2\right)$

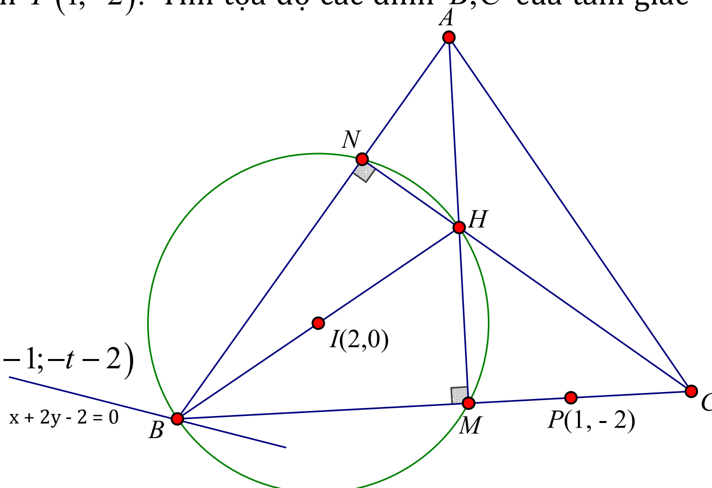
$AD: y-2=0$, vì $E=CE\cap AD \Rightarrow E\left(1;2\right)$

Vì E là trung điểm AD nên $D\left(3;2\right)$

Vì $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \Rightarrow C\left(3;-2\right)$. Kết luận

<u>Câu 7</u>. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A\left(-1;4\right)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I\left(2;0\right)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P\left(1;-2\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$

Hướng dẫn:



Ta thấy tứ giác $BMHN$ nội tiếp.

Suy ra I là trung điểm của BH; $B\in d \Rightarrow B\left(2-2t;t\right)$

Suy ra $H\left(2+2t;-t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(3+2t;-t-4\right), \overrightarrow{BP}=\left(2t-1;-t-2\right)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

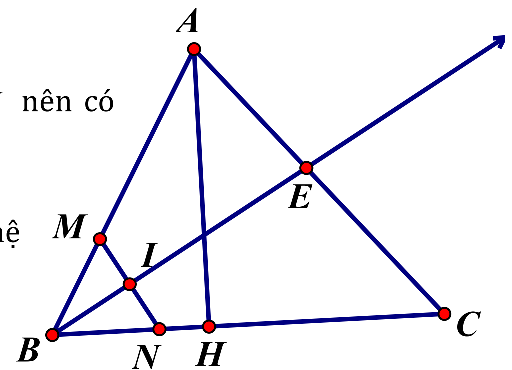
$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow \left(2t+3\right)\left(2t-1\right)+\left(t+4\right)\left(t+2\right)=0 \Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH} = (1;-3)$, đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được tọa độ $C(-5;-4)$

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đường cao AH có phương trình $3x+4y+10=0$ và đường phân giác trong BE có phương trình $x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách đỉnh C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn:



Gọi N là điểm đối xứng của M qua phân giác BE thì N thuộc BC

Tính được $N(1;1)$. Đường thẳng BC qua N và vuông góc với AH nên có phương trình $4x-3y-1=0$

B là giao điểm của BC và BE. suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(4;5)$

Đường thẳng AB qua B và M nên có phương trình: $2x-4y+8=0$

A là giao điểm của AB và AH, suy ra tọa độ A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-4y-8=0 \\ 3x+4y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$$

Điểm C thuộc BC và $MC=2$ suy ra tọa độ C là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=1 \\ x=\frac{31}{25}; y=\frac{33}{25} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(1;1) \\ C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right) \end{array}\right.$$

Thế tọa độ A và $C(1;1)$ vào phương trình BE thì hai giá trị trái dấu, suy ra A, C khác phía đối với BE, do đó BE là phân giác trong tam giác ABC.

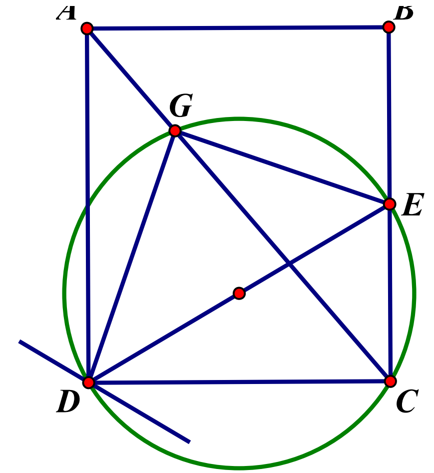
Tương tự A và $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$ thì A, C cùng phía với BE nên BE là phân giác ngoài của tam giác ABC.

$BC=5, AH=d(A,BC)=\frac{49}{20}$. do đó $S_{ABC}=\frac{49}{8}$ (đvdt).

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 18. Gọi E là trung điểm cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt đường chéo AC tại G, (G không trùng với

C). Biết $E(1;-1), G\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$ và điểm D thuộc đường thẳng $d: x+y-6=0$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C,D.

Hướng dẫn:



Do tứ giác $CDGE$ nội tiếp $\Rightarrow DG \perp GE$,

Do $D \in d \Rightarrow D(t;6-t)$

Ta có $\overrightarrow{EG}\left(-\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right);\overrightarrow{DG}\left(t-\frac{2}{5};\frac{26}{5}-t\right)$ do $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{DG}=0 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow D(4;2)$

Suy ra $DE=3\sqrt{2}, DE: x-y-2=0$

Gọi $C(a;b)$, do

$$S_{ABCD}=18 \Rightarrow S_{CDE}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(C;DE).DE=\frac{9}{2} \Leftrightarrow |a-b-2|=3. \quad (1)$$

Mà $\overrightarrow{DC}(a-4;b-2), \overrightarrow{EC}(a-1;b+1)$; do

$$CD \perp CE \Rightarrow \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EC}=0 \Leftrightarrow (a-4)(a-1)+(b-2)(b+1)=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}|a-b-2|=3\\ a^2-5a+b^2-b+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=4;b=-1\\ a=1;b=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}C(4;-1)\\ C(1;2)\end{array}\right.$

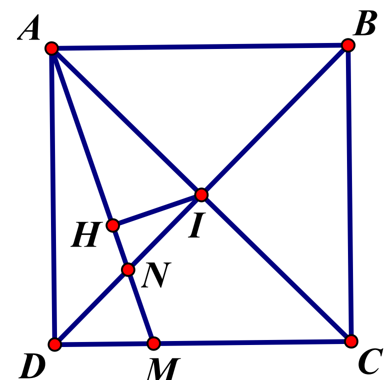
Do C và G nằm khác phía với bờ là đường thẳng $DE \Rightarrow C(1;2)$ không thỏa mãn

Suy ra $C(4;-1)$ thỏa mãn.

Vì M là trung điểm BC nên $B(-2;-1)$. Do $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow A(-2;2)$

<u>**Câu 10**</u>. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(3;-1)$, điểm M trên cạnh CD sao cho $MC=2MD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết đường thẳng AM có phương trình $2x-y-4=0$ và đỉnh A có tung độ dương.

Hướng dẫn:



Gọi H là hình chiếu của I trên $AM \Rightarrow IH=d(I;AM)=\frac{3}{\sqrt{5}}$

Giả sử $AM \cap BD = N$ và P là trung điểm của

$MC \Rightarrow IP \parallel AM \Rightarrow NM \parallel IP.$

Từ M là trung điểm của DP suy ra N là trung điểm của DI

Gọi cạnh của hình vuông là a thì $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, IN = \dfrac{1}{2}IN = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Từ $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{IN^2} \Rightarrow \dfrac{5}{9} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

A thuộc AM nên $A(t;2t-4) \Rightarrow IA = \sqrt{(t-3)^2 + (2t-3)^2} = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 9 = 0$

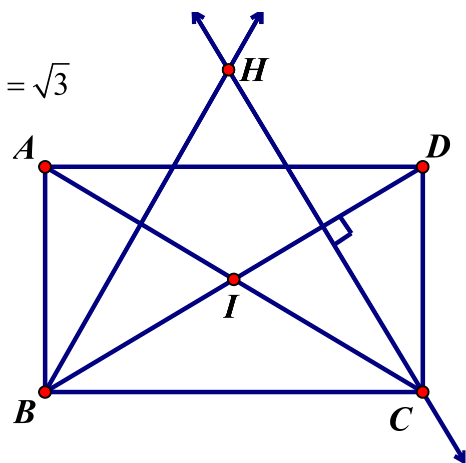
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \Rightarrow A(3;2) \\ t = \dfrac{3}{5} \Rightarrow A\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{14}{5}\right) \end{array}\right.$. do A có tung độ dương nên $A(3;2)$

Suy ra $C(3;-4)$. Đường thẳng BD đi qua điểm I và có vtpt $\overrightarrow{AI} = (0;-3)$ có phương trình $y+1=0$.

$N = AM \cap BD \Rightarrow N\left(\dfrac{3}{2};-1\right)$. N là trung điểm của $DI \Rightarrow D(0;-1) \Rightarrow B(6;-1)$

<u>Câu 11</u>. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $3\sqrt{3}$, đỉnh D thuộc đường thẳng $d: \sqrt{3}x - y = 0, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{ABD}$ và đường cao của tam giác BCD kẻ từ C là điểm $H\left(\sqrt{3};3\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết hoành độ của B và D đều nhỏ hơn $\sqrt{3}$

Hướng dẫn:



Gọi $I = AC \cap BD$. Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$ có $S = AB.BC = 3\sqrt{3}$ nên $x = \sqrt{3}$

Ta có $\widehat{DBC} = \widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HBD} = 30^\circ \Rightarrow BD$ là phân giác trong của góc $\widehat{HBC}$ và cũng là đường cao nên BD là trung trực của HC

$\Rightarrow HD = CD = \sqrt{3}; \widehat{BHD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $BH = BC = 3$

$D \in d \Rightarrow D\left(t;\sqrt{3}t\right); HD = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(T/M)} \\ t = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & \text{(loai)} \end{array}\right. \Rightarrow D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Đường thẳng HB đi qua $H\left(\sqrt{3};3\right)$, có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{DH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên có phương trình:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\left(y-3\right)=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0$$

$$B\in HD \Rightarrow B\left(b;4-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(b<\sqrt{3}\right)$$

$$HB=3 \Leftrightarrow \left(b-\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b=\frac{5\sqrt{3}}{2} & (Loai) \\ b=\frac{-\sqrt{3}}{2} & (T/M) \end{array}\right. \Rightarrow B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2}\right)$$

Vậy tọa độ các điểm B,D là: $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2}\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$

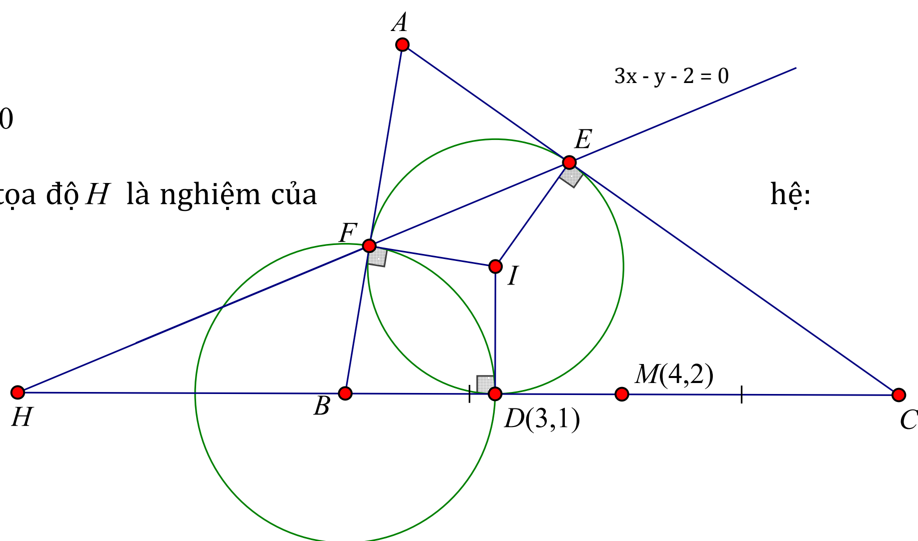
Bài 12.*(THPT – Quỳnh Lưu 3 – Nghệ An)* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $D(3;1)$, trung điểm của BC là $M(4;2)$, phương trình $EF: 3x-y-2=0$ và B có hoành độ bé hơn 4.

Hướng dẫn

Phương trình đường thẳng $BC: x-y-2=0$

Gọi H là giao điểm của EF và BC ta có tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\x-y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}, H(0;-2).$$



Từ các giả thiết, ta thấy H nằm trên tia đối của tia BC.

Ta chứng minh

$\boxed{MD.MH = MB^2.}$

Thật vậy, qua B kẻ đường thẳng song song với CA cắt HE tại G. Khi đó ta có $BG = BF = BD$ đồng thời $\frac{HB}{HC}=\frac{GB}{CE}=\frac{DB}{DC} \Rightarrow HB.DC = DB.HC$. Vì M là trung điểm đoạn BC nên ta được $(MH-MB)(MB+MD)=(MB-MD)(MH+MB) \Leftrightarrow MH.MD = MB^2$

Gọi $B(t;t-2), t<4$ ta có $2(t-4)^2=8 \Leftrightarrow t-4=-2 \Leftrightarrow t=2, B(2;0) \Rightarrow C(6;4)$

Phương trình đường tròn tâm B bán kính BD là $(T):(x-2)^2+y^2=2$

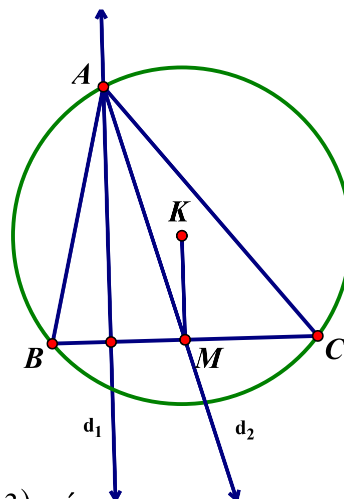
Đường thẳng EF cắt (T) tại G và F có tọa độ là nghiệm của hệ

$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2\\3x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$. Vì G nằm giữa H và F nên $F(1;1),G\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. Khi đó phương trình $AB:x+y-2=0, AC$ đi qua C và song song với BG nên có phương trình: $x-7y+22=0$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-2=0\\x-7y+22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}, A(-1;3)$

Vậy $A(-1;3),B(2;0),C(6;4)$

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm $K\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $3x-4y+5=0$ và $2x-y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn:



Từ giả thiết, tọa độ của A là nghiệm của hệ

$\begin{cases}3x-4y+5=0\\2x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$

Gọi M là trung điểm của BC

$KM \parallel d_1$.

Đường thẳng KM đi qua $K\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(4;3)$ có phương trình $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+4t\\y=-\dfrac{1}{2}+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+4t\\y=-\dfrac{1}{2}+3t\\2x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{1}{2};1\right)$ vuông góc với $d_1: 3x-4y+5=0$ có phương trình

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+3m \\ y=1-4m \end{cases}(m\in\mathbb{R}) \begin{array}{l} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}+3m;1-4m\right) \\ \Rightarrow KB^2=\left(\frac{1}{2}+3M+\frac{3}{2}\right)^2+\left(1-4m+\frac{1}{2}\right)^2=(2+3m)^2+\left(\frac{3}{2}-4m\right)^2=25m^2+\frac{25}{4} \end{array}$$

Từ giả thiết, ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$AK^2=\left(1+\frac{3}{2}\right)^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{50}{4}.$$

Mà $BK^2=AK^2=CK^2 \Leftrightarrow 25m^2+\frac{25}{4}=\frac{50}{4} \Leftrightarrow m^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$

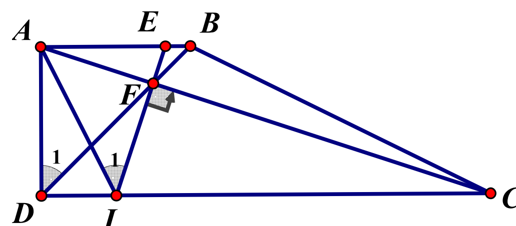
Với $m=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ ta có điểm $(2;-1)$

Với $m=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ ta có điểm $(-1;3)$

Vậy tọa độ 2 đỉnh còn lại B và C có tọa độ là $(2;-1),(-1;3)$

<u>Câu 14.</u> Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, $AB=AD=\frac{1}{3}CD$. Giao điểm của AC và BD là $E(3;-3)$, điểm $F(5;-9)$ thuộc cạnh AB sao cho $AF=5FB$. Tìm tọa độ đỉnh D, biết rằng đỉnh A có tung độ âm.

Hướng dẫn:



Gọi $I=EF\cap CD$. Ta sẽ chứng minh tam giác EAI vuông cân tại E.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Khi đó $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}.\vec{b}=0$. Ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+3\vec{a}$.

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\vec{b}+3\vec{a})-\frac{5}{6}\vec{a}=\frac{1}{12}(3\vec{b}-\vec{a})$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EF}=\frac{1}{12}\left(3|\vec{b}|^2-3|\vec{a}|^2\right)=0$. Do đó $AC\perp EF$. (1)

Từ (1) suy ra tứ giác ADIE nội tiếp. suy ra $\widehat{I_1}=\widehat{D_1}=45^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EAI vuông cân tại E.

Ta có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{EF}(2;-6)$ nên $AC: x-3y-12=0 \Rightarrow A(3a+12;a)$

Theo định lý Talet ta có $\frac{EI}{EF} = \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{EI} = 3\overrightarrow{FE} \Rightarrow I(-3;15)$

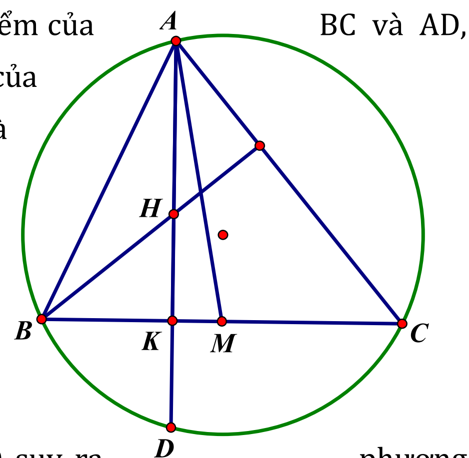
Khi đó $EA = EI \Leftrightarrow (3a+9)^2 + (a+3)^2 = 360 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-9 \end{array}\right.$

Vì A có tung độ âm nên $A(-15;-9)$

Ta có $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{AF}(20;0)$ nên $AD: x=-15 \Rightarrow CD: y=15$. Do đó $D(-15;15)$

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x+5y-8=0, x-y-4=0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC vắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Hướng dẫn:



Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD: 1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{KCE}$, mà $\widehat{KCE} = \widehat{BDA}$ (nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{BDK}$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$

Do B thuộc BC $\Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$

$\overrightarrow{HB}(t-2;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$

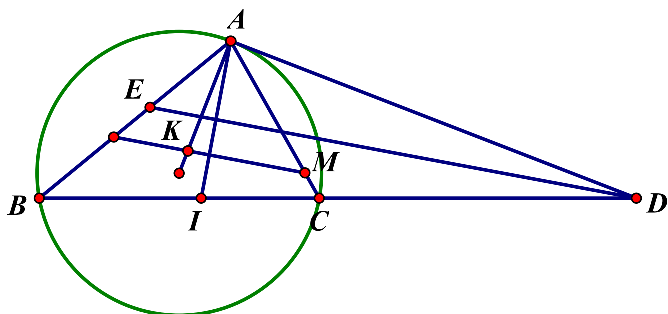
Do $t\le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-3), \overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1), \overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

Suy ra $AB: 3x+y-4=0; AC: y-1=0$

<u>Câu 16.</u> Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn:

Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$



Ta có: $\widehat{AID}=\widehat{ABC}+\widehat{BAI}$

$\widehat{IAD}=\widehat{CAD}+\widehat{CAI}$

Mà $\widehat{BAI}=\widehat{CAI}, \widehat{ABC}=\widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID}=\widehat{IAD}$

$\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$

PT đường thẳng AI là: $x+y-5=0$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ PT đường thẳng $MM': x-y+5=0$

Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$

VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'}=(3;5)$

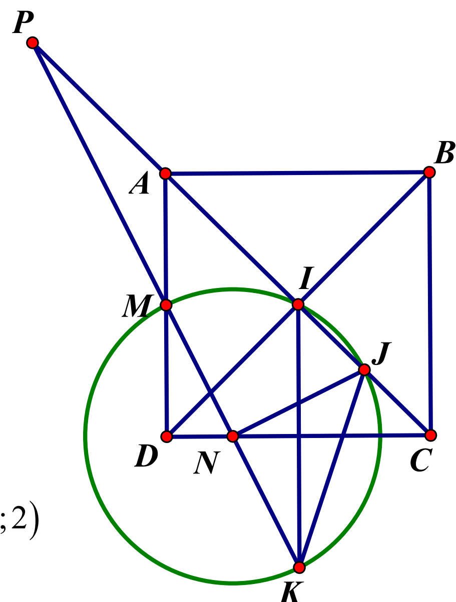
$\Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n}=(5;-3)$

Vậy PT đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0$

<u>Câu 17.</u> Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho hình vuông ABCD, M là trung điểm của đoạn AD, N thuộc đoạn DC sao cho $NC=3ND$. Đường tròn tâm N qua M cắt AC tại $J(3;1), J\ne I = AC\cap BD$, đường thẳng đi qua M, N có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ điểm B.

Hướng dẫn:

MN cắt đường tròn tâm N tại K. Ta chứng minh được tứ giác MIJK nội tiếp $\widehat{NKJ} = \widehat{AIM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{JNK} = 90^\circ$



$NJ \perp MN$ nên có phương trình: $x - y - 2 = 0$

Suy ra được $N\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

ΔJMN vuông cân tại N nên $MJ = \sqrt{2}PN \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-4) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$

Với $M(-2;1)$ gọi $P = MN \cap JA$ ta có $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{NM} \Rightarrow P(-7;6)$

$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PJ}$ tìm được $A(-3;4)$, vì A là trung điểm của IP nên $I(1;2)$

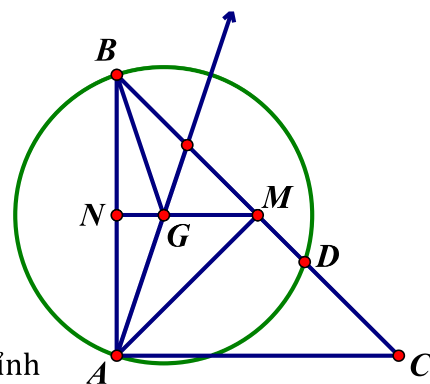
Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow B(3;6)$

Tương tự với $M(3;-4)$ ta tìm được $A(6;-5), I(4;-1)$ và $B(8;1)$

Vậy tọa độ điểm $B(3;6)$ hoặc $B(8;1)$

<u>Câu 18</u>. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BG, G là trọng tâm tam giác ABM, điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn 4 và AG có ohương trình $3x - y - 13 = 0$.

Hướng dẫn:



Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng AG

$$d(D, AG) = \frac{|3.7 + 2 - 13|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10}$$

Xác định hình chiếu của D trên AG.

Ta có tam giác ABC vuông cân đỉnh A nên tam giác ABM vuông cân đỉnh M.

Suy ra $GB = GA$. Theo giả thiết $GA = GD$ nên tam giác ABD nội tiếp đường tâm G bán kính GA.

Ta có: $\widehat{AGD} = 2\widehat{ABD} = 90^\circ$ suy ra $DG \perp AG$ suy ra $GD = \sqrt{10}$

Suy ra tam giác AGD vuông cân đỉnh G suy ra $AD = 2\sqrt{10}$

Tìm điểm A nằm trên đường thẳng AG sao cho $AD = 2\sqrt{10}$

Giả sử $A(t;3t-13)$

$AD=2\sqrt{10}\Leftrightarrow (t-7)^2+(3t-11)^2=20$

$\Leftrightarrow t^2-14t+49+9t^2-66t+121-20=0$

$\Leftrightarrow 10t^2-80t+150=0\Leftrightarrow t^2-8t+15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=3 \end{array}\right.$

Với $t=3$ suy ra $A(3;-4)$

Tìm số đo góc tạo bởi AB và AG.

$$\cos\widehat{NAG}=\frac{NA}{AG}=\frac{NM}{AG}=\frac{3NG}{AG}=\frac{3NG}{\sqrt{AN^2+NG^2}}=\frac{3NG}{\sqrt{9NG^2+NG^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Giả sử đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ ta có:

$$\frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 9a^2+b^2-6ab=9a^2+9b^2\Leftrightarrow 8b^2+6ab=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 4b=-3a \end{array}\right.$

TH1: $b=0$ chọn $a=1$ suy ra $\vec{n}=(1;0)$ suy ra $AB:x-3=0$

$$d(D,AB)=\frac{|7-3|}{\sqrt{1}}=4>\sqrt{10}=d(D,AG)$$

TH2: $4b=-3a$ chọn $\vec{n}=(4;-3)$ suy ra $AB:4(x-3)-3(y+4)=0$

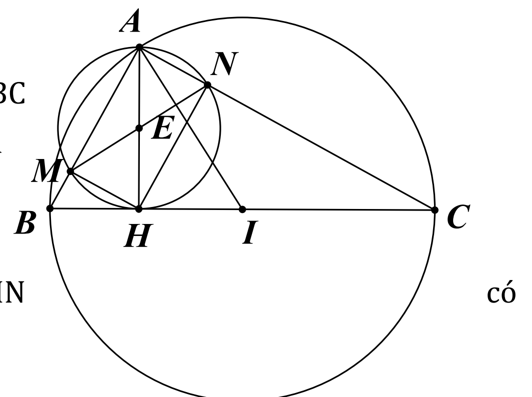
$\Leftrightarrow 4x-3y-24=0$

$$d(D,AB)=\frac{|4.7+3.2-24|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2<\sqrt{10}$$

Trong hai trường hợp trên xét thấy $d(D,AB)>d(A,AG)$ nên $AB:x-3=0$

Vậy: $A(3;-4), AB:x-3=0$

<u>Câu 19.</u> Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có



phương trình $20x-10y-9=0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Hướng dẫn:

(T) có tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Do $IA=IC \Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{ICA}$ (1)

Đường tròn đường kính AH cắt BC tại $M \Rightarrow MH \perp AB \Rightarrow MH \parallel AC$ (cùng vuông góc AB) $\Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{ICA}$ (2)

Ta có: $\widehat{ANM}=\widehat{AHM}$ (chắn cung AM) (3)

Từ (1),(2),(3) ta có:

$\widehat{IAC}+\widehat{ANM}=\widehat{ICA}+\widehat{AHM}=\widehat{MHB}+\widehat{AHM}=90^\circ$

Suy ra: AI vuông góc MN

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng IA là: $x+2y-5=0$

Giả sử $A(5-2a;a)\in IA$

Mà $A\in(T)\Leftrightarrow(5-2a)^2+a^2-6(5-2a)-2a+5=0\Leftrightarrow 5a^2-10a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Với $a=2\Rightarrow A(1;2)$ (thỏa mãn vì A, I khác phía MN)

Với $a=0\Rightarrow A(5;0)$ (loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính $AH\Rightarrow E\in MN\Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$

Do E là trung điểm $AH\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{38}{10}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right),\overrightarrow{IH}=\left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$

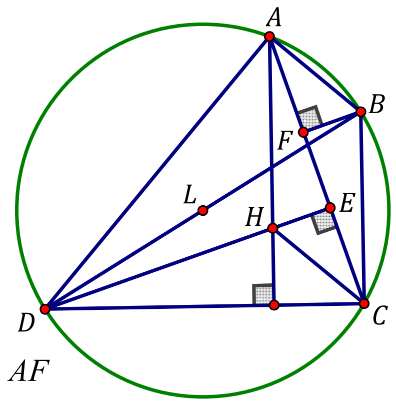
Vì $AH\perp HI\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH}=\vec{0}\Leftrightarrow 20t^2-\frac{272}{5}t+\frac{869}{25}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=\frac{8}{5} & \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)\ \text{(TM)}\\ t=\frac{28}{25} & \Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right)\ \text{(loai)}\end{array}\right.$

Với $t=\frac{8}{5}\Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ (thỏa mãn)

Ta có: $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right)\Rightarrow BC$ nhận $\vec{n}=(2;1)$ là VTPT. $\Rightarrow$ phương trình BC là $2x+y-7=0$

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Đỉnh B thuộc đường thẳng Δ có phương trình $x+y-5=0$. Các điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và B lên AC. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết $CE=\sqrt{5}$ và $A(4;3),C(0;-5)$.

Hướng dẫn:



Gọi H là trực tâm tam giác ACD, suy ra $CH\perp AD$ nên $CH \parallel AB$. (1)

Mặt khác $AH \parallel BC$ (cùng vuông góc với CD) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCH là hình bình hành nên $CH=AB$ (3)

Ta có: $\widehat{HCE}=\widehat{BAF}$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\Delta HCE=\Delta BAF$ (cạnh huyền và góc nhọn). vậy $CE=AF$

Vì $\widehat{DAB}=\widehat{DCB}=90^\circ$ nên E, F nằm trong đoạn AC.

Phương trình đường thẳng $AC: 2x-y-5=0$

Vì $F\in AC$ nên $F(a;2a-5)$. Vì $AF=CE=\sqrt{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=3\end{array}\right.$

Với $a=5\Rightarrow F(5;5)$ (không thỏa mãn vì F nằm ngoài đoạn AC)

Với $a=3\Rightarrow F(3;1)$ (thỏa mãn). Vì $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC}\Rightarrow E(1;-3)$

BF qua F và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một vectơ pháp tuyến, do đó BF có phương trình $x+2y-5=0$. B là giao điểm của Δ và BF nên tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-5=0\\x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}\Rightarrow B(5;0)$$

Đường thẳng DE qua E và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một vectơ pháp tuyến, DE có phương trình $x+2y+5=0$

Đường thẳng DA qua A và nhận $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ làm một vectơ pháp tuyến, DA có phương trình $x-3y+5=0$

D là giao điểm của DA và DE nên tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}x+2y+5=0\\x-3y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}\Rightarrow D(-5;0)$. Kết luận: $B(5;0),D(-5;0)$